SÉRIES E PRODUTOS INFINITOS

Resumo. O estudo das séries de termos reais, estudado nas disciplinas de Análise Matemática da grande generalidade dos cursos técnicos de licenciatura, é aqui estendido ao corpo complexo, bem como ao caso em que os termos da série são elementos de espaços vetoriais, reais ou complexos. Aborda-se, por igual, o caso dos produtos infinitos de termos reais, em geral ausentes daqueles programas, procurando mostrar o que existe de comum em todos estes temas.

Na generalidade dos cursos de licenciatura das áreas científica e técnica, no âmbito das disciplinas de Análise Matemática, são estudadas as séries de termos reais, bem como as séries de potências, casos particulares das séries funcionais.

O estudo das séries numéricas de termos não reais, seja, por exemplo, o das séries de termos complexos, ou o das séries de termos vetoriais, está, de um modo muito geral, completamente ausente, o mesmo acontecendo com o estudo geral das séries de termos funcionais, sejam reais ou complexos.

Mas o que deixou de ser abordado na grande generalidade desses cursos foi o estudo dos produtos infinitos, mesmo que só no caso numérico real.

Acontece, porém, que é fortíssima a unidade doutrinária subjacente a todos estes temas, de um modo muito geral assente nas propriedades das séries de termos reais positivos.

Como se sabe, o valor - ou soma - de uma série de termos reais positivos não é o resultado da aplicação iterada da operação de adição de termos em $\mathbf{R}^+$, porque a adição é uma operação que incide sobre um número finito de parcelas, ao passo que a série envolve essa operação, mas sobre uma infinidade numerável de parcelas.

Este facto determina que à generalidade das séries se não possa atribuir um valor real. Nuns casos, porque a série é divergente, noutros, porque é simplesmente convergente.

As operações consentidas na adição de números reais só estão presentes ao nível das designadas séries absolutamente convergentes.

Ora, no estudo de uma série de termos reais positivos há dois temas que são centrais: por um lado, estudar a sua natureza, ou seja, saber se a série é divergente ou convergente, e, neste caso, se é simplesmente convergente ou absolutamente convergente; por outro lado, e neste último caso, determinar o seu valor.

Ora, também para a generalidade das séries deste último tipo não é possível determinar o seu valor exato, embora se disponha de critérios diversos para estimar um seu valor aproximado, e com um erro tão pequeno quanto se queira.

Esses critérios, em mui larga medida, encontram-se ligados às propriedades usadas para determinar a natureza da série, sendo fáceis de aplicar. Contudo, há o erro assim estimado, proveniente de se tomar para estimativa do valor da série a soma de um número finito dos seus termos, e o que resulta dos cálculos realizados, ao nível estritamente numérico.

Se a série for de termos reais negativos, basta estudar a série dos módulos dos seus termos - série modular -, sendo a mesma a natureza das duas séries.

No caso de uma série alternada, ao nível do sinal dos seus termos, o Critério de Leibnitz é o meio adequado ao seu estudo, embora só garanta, no caso de convergência, que a mesma é simples, havendo que proceder ao estudo da correspondente série modular para se poder saber se essa convergência é também absoluta.

Finalmente, no caso de uma série de termos reais - positivos, nulos e negativos -, há que estudar a respetiva série modular, ou recorrer a critérios comparativos, ou mesmo outros.

Um tema há, porém, que raramente é hoje ilustrado, mormente usando exemplos, aquando do estudo das séries de termos reais, e que é o facto de uma série simplesmente convergente, por permutação adequada dos seus termos, poder ser conduzida a uma outra divergente, ou a uma que apresente um valor pré-fixado.

Veja-se, então, o caso da série harmónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

que pode mostrar-se, usando o Critério de Leibnitz, ser convergente, embora seja simplesmente convergente.

Admita-se que se pretende operar uma permutação dos termos desta série, por forma que o seu valor seja 0,6. Bastará, então, considerar a nova série, obtida por permutação conveniente dos termos da dada:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right]+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\cdots$$

cuja sucessão de somas parciais é:

$$1 \quad , \quad 0{,}5 \quad , \quad 0{,}8(3) \quad , \quad 0{,}58(3) \quad , \quad 0{,}78(3) \quad , \quad 0{,}491(6) \quad , \quad 0{,}653 \quad , \quad 0{,}535 \quad , \quad 0{,}646 \quad ,\ldots$$

que converge alternadamente para o valor pré-fixado da série, 0,6.

Mas admita-se agora que que se pretende operar uma permutação dos termos daquela série, de modo a que o seu valor seja, já não 0,6, mas sim 1,2. Bastaria, então, operar sobre a série em causa a seguinte nova permutação dos seus termos:

$$\left[1+\frac{1}{3}\right]-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right]-\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right]-\cdots$$

e cuja sucessão de somas parciais converge, de modo alternado, para 1,2, como se pretendia.

O que se fez, uma vez fixado o valor pretendido para a série, foi tomar para primeiro termo da mesma a soma do número mínimo de termos positivos da dada, de molde a ultrapassar o valor requerido.

Para segundo termo da nova série considerou-se a soma do número mínimo de termos negativos da série inicial, de molde a que, somados com o primeiro termo, o resultado desça abaixo do valor pré-fixado.

Como terceiro termo da nova série considerou-se a soma do número mínimo de termos positivos da série inicial, de molde a que, somados com os dois primeiros termos, o resultado volte a ultrapassar o valor pré-fixado da série. E assim por diante.

Tal como referido atrás, há um tema que deixou de ser tratado nas disciplinas de Análise Matemática dos atuais cursos de licenciatura, e que é o dos produtos infinitos.

Acontece que a sua doutrina assenta, precisamente, no estudo da teoria das séries, pelo que a sua abordagem se torna muito simples.

Assim como se designou série de termos reais a entidade:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

sendo (u_n) uma sucessão de termos em **R**, produto infinito de fatores reais é toda a entidade que possa reduzir-se à forma:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 \ldots u_n \ldots$$

e onde (u_n) é uma sucessão de termos em **R**. E, tal como se dá com as séries, também a u_n se dá o nome de termo geral do produto infinito.

Este produto pode, com vantagem, escrever-se na forma:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + v_n)$$

desde que se faça:

$$u_n = 1 + (u_n - 1) = 1 + v_n$$

e onde v_n se designa por fator geral do produto infinito.

À sucessão de termo geral:

$$p_n = (1 + v_1)(1 + v_2) \cdots (1 + v_n)$$

dá-se o nome de sucessão de produtos parciais do produto infinito dado, que será convergente se aquela o for, ou seja, se:

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = p \in \mathbf{R}$$

sendo divergente no caso contrário. No caso de convergência, o resultado do produto infinito toma, como se passa com as séries, o nome de valor do produto infinito.

E o produto infinito convergente:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + v_n)$$

diz-se absolutamente convergente se o for também o produto infinito:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} [1 + |v_n|]$$

e simplesmente convergente se este último for divergente.

E assim como:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

é uma condição necessária de convergência de uma série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

também:

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + v_n) = 1$$

é uma condição necessária de convergência do produto infinito:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + v_n)$$

o que permite concluir que este será divergente se:

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + v_n) \neq 1$$

ou não existir em **R**. A aplicação de logaritmos ao produto infinito mostrará a razão de ser da vantagem de se substituir, no produto, u_n por $1 + v_n$.

Finalmente, a importantíssima relação entre as duas entidades matemáticas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \quad , \quad \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + v_n)$$

quando $v_n \geq 0$, e que é o facto de ser a mesma a sua natureza: ou ambas convergentes, ou ambas divergentes.

É o caso do produto infinito:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{n+1}{n} \right] = \prod_{n=1}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n} \right]$$

que é divergente, dado que divergente é a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

que é a conhecida série harmónica.

Inverso é o caso do produto infinito:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left[1+\frac{1}{n^2}\right]$$

que é convergente, uma vez que o é igualmente a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

e onde, em qualquer dos casos, $v_n \geq 0$. Por esta razão, o último produto infinito é mesmo absolutamente convergente.

Salta, pois, à vista a ligação profunda entre a doutrina das séries de termos reais positivos e a dos produtos infinitos de termos idênticos. E o mesmo se estende aos restantes casos, com mui ligeiras diferenças.

Um outro tema, que normalmente não é abordado nos cursos técnicos de licenciatura, com algumas exceções, é o das séries de termos complexos. No fundo, trata-se de séries do tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

onde (z_n) é uma sucessão de termos em **C**. É o caso, por exemplo, da série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{i}{n(n+2)}\right]$$

e que também pode escrever-se na forma:

$$\left(1+\frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}i\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}i\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+2)}i\right) + \cdots$$

onde cada termo da série é um elemento de **C**.

A doutrina aplicável é em tudo idêntica à das séries de termos reais, sendo de salientar a sempre referente condição necessária de convergência, a cuja luz, sendo a série convergente, se tem:

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = 0$$

pelo que, sendo:

$$\lim_{n \to +\infty} z_n \neq 0$$

a série é divergente. É o caso, por exemplo, da série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{n+1}{n} + i\frac{1}{n^2}\right]$$

para a qual se tem:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n+1}{n} + i\frac{1}{n^2}\right] = 1 + 0.i = 1 \neq 0$$

pelo que a série considerada é divergente.

Mas note-se, contudo, que a série anterior:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{i}{n(n+2)}\right]$$

é também divergente, embora se tenha:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{i}{n(n+2)}\right] = 0.$$

Continuam válidas as definições de convergência simples e absoluta, sendo a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

absolutamente convergente se, sendo convergente, o for por igual a sua série modular:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$$

e simplesmente convergente se esta última for divergente.

Importante é notar que, sendo:

$$z_n = a_n + ib_n$$

a série de termos em **C**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

será convergente se o forem as séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

e divergente se uma destas, pelo menos, for divergente.

Assim, a série de termos em **C**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{i}{n(n+1)}\right]$$

é convergente, visto que também o são as séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

e sendo o seu valor:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{i}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{7} + i.$$

Em contrapartida, a série já referida:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{i}{n(n+2)}\right]$$

é divergente, dado que o é igualmente a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

que é a conhecida série harmónica.

O leitor estudioso e interessado facilmente conseguirá adaptar às séries de termos em **C** a generalidade da doutrina conhecida das séries de termos reais.

Por fim, o caso das séries de termos em $\mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}_2$, sendo a respetiva extensão ao caso das séries em $\mathbf{C}^m$ em tudo idêntica à operada na passagem do caso das séries de termos em **R** para as de termos em **C**. Ora, dá-se o nome de série de termos em $\mathbf{R}^m$, à entidade matemática do tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left({}^1u_n, {}^2u_n, \ldots, {}^m u_n\right)$$

onde $({}^j u_n)$, $(j = 1, \ldots, m)$, são sucessões de termos reais. Simplificando, por ausência de perigo de confusão, poderá escrever-se:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\vec{u}_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}u_n\ .$$

E uma tal série será convergente se o for a respetiva sucessão de somas parciais, ou seja, se for convergente a sucessão de termo geral:

$$s_n = \left({}^1u_1, \ldots, {}^m u_1\right) + \cdots + \left({}^1u_n, \ldots, {}^m u_n\right).$$

Se assim for, ter-se-á:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \left({}^1u, \ldots, {}^m u\right)$$

o que equivale a ter:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[s_n - \left({}^1u, \ldots, {}^m u\right)\right] = (0, \ldots, 0)$$

ou, o que é o mesmo, se se tiver:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\| s_n - \left({}^{1}u,..,{}^{m}u \right) \right\| = 0.$$

E também aqui continuam válidos os conceitos de divergência, convergência, convergência simples e convergência absoluta. E também a condição necessária de convergência de uma série, a cuja luz, se a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left({}^{1}u_n, {}^{2}u_n, ..., {}^{m}u_n \right)$$

for convergente, terá de ter-se:

$$\lim_{n\to+\infty}\left({}^{1}u_n, ..., {}^{m}u_n \right) = (0,...,0) \in \mathbf{R}^m$$

pelo que, sendo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left({}^{1}u_n, ..., {}^{m}u_n \right) \neq (0,...,0) \in \mathbf{R}^m$$

a série considerada será divergente.

Assim, a série de termos em $\mathbf{R}^3$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{n+1}{n+3}, \left(\frac{1}{2}\right)^n, 1-e^{-n} \right]$$

é divergente, uma vez que se tem:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n+1}{n+3}, \left(\frac{1}{2}\right)^n, 1-e^{-n} \right] = (1,0,1) \neq (0,0,0).$$

Ao contrário, a série de termos em $\mathbf{R}^3$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n^2}, \left(\frac{1}{8}\right)^n, \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

é convergente, porque o são igualmente as séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

como se sabe do estudo das séries de termos em $\mathbf{R}$, sendo o valor daquela série o vetor de $\mathbf{R}^3$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n^2}, \left(\frac{1}{8}\right)^n, \frac{1}{n(n+1)} \right] = \left(\frac{\pi^2}{6}, \frac{1}{7}, 1 \right).$$

Assim, uma série de termos em **R**^{m}, $m \in$ **N**$_1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left({}^1u_n, {}^2u_n, \ldots, {}^mu_n \right)$$

será convergente se o forem as séries de termos reais:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} {}^ju_n$$

com $j = 1, \ldots, m$, e será divergente se uma, ao menos, dessas séries o for.

Torna-se agora simples entender o modo de tratar uma série do tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left({}^1z_n, \ldots, {}^mz_n \right)$$

de termos em **C**^{m}, $m \in$ **N**$_1$, visto que a respetiva convergência está dependente da convergência conjunta das séries de termos em **C**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} {}^jz_n$$

com $j = 1, \ldots, m$, sendo a série divergente se uma das m últimas séries, ao menos, for divergente.

Mostrou-se, pois, a profunda unidade doutrinária existente no domínio das séries de termos vetoriais, sejam de componentes reais ou complexas, bem como dos produtos infinitos de fatores reais. É, no fundo, e com grande generalidade, um só problema.